Dérivation

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Voir TP info n°2.

1 Fontion dérivable en un point

1.1 Taux d'accroissement

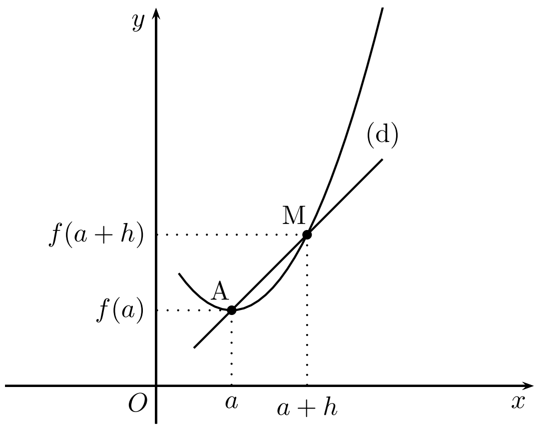
Définition 1.1 *On appelle taux d'accroissement de f entre a et x le réel :*

$$\boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad x \neq a}$$

Remarque *Si $x = a + h$ (cas où le point M s'approche du point A), ce taux d'accroissement devient :*

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ce taux d'accroissement correspond au coefficient directeur de la droite (AM).



1.2 Nombre dérivé de f en a

Définition 1.2 *f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si la limite du taux d'accroissement en a $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.*

En général, on montre que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. On note dans ce cas

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

$f'(a)$ est appelé nombre dérivé de f en a.

Exemple 1.3 Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x + 4$. Montrer que f est dérivable en -1 et donner la valeur de $f'(-1)$.

Solution : On simplifie $Taux = \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$.

$Taux = \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{3(-1+h)+4-(3(-1)+4)}{h}$

Soit $Taux = \dfrac{3h}{h}$ soit $Taux = 3$. Quand h tend vers 0 (il suffit de remplacer h par 0 dans le taux simplifié), $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ tend vers 3.

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = 3$ donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 3$.

Exercice 1 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Montrer que f est dérivable en 1 et donner la valeur de $f'(1)$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

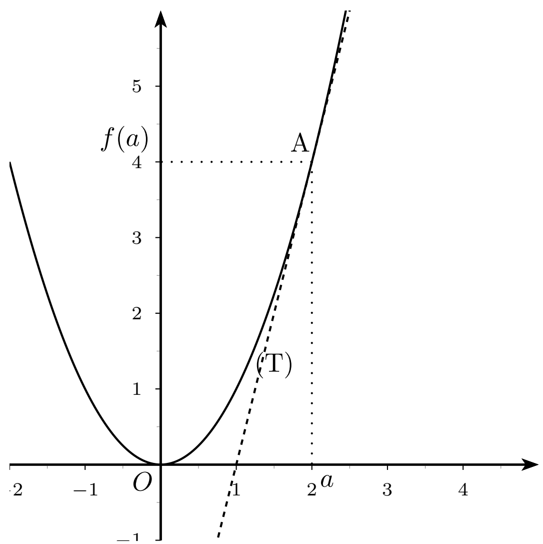
1.3 Tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a

Propriété 1.4 *Si f est dérivable en a, la droite (AM) tend vers une "droite limite" appelée tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.*
La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a admet pour coefficient directeur $m = f'(a)$.

Cette tangente a donc pour équation

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

.



Remarque *Pour déterminer $f'(a)$, deux cas se présentent*

1. *la courbe est donnée ainsi qu'une tangente : identifier a et m.*
2. *la formule de f est donnée : simplifier le taux d'accroissement puis passer à la limite en remplacant h par 0.*

Exercice 3 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au pointd'abscisse 3.

Remarque

1. *Une courbe représentative peut avoir une tangente verticale en un point et ne pas être dérivable, car une tangente verticale ne possède pas de coefficient directeur (équation $x = b$ où b est réel). Dans ce cas, on obtient une limite du taux d'accroissement infinie.*
2. *Si les limites à gauche et à droite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existent, il faut qu'elles soient identiques pour pouvoir dire que f est dérivable en a. Sinon, f est dite dérivable à droite ou à gauche et sa courbe possède une ou deux demi-tangentes.*

Exercice 4 Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \mapsto |x|$ (on étudiera la limite à gauche et à droite en 0).

2 Dérivées des fonctions usuelles

Définition 2.1 *Une fonction dérivable en tout point de l'intervalle I est dite* ***dérivable*** *sur I, la fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur I est appelée* ***fonction dérivée*** *de f et notée f'.*

Propriété 2.2 *n est un entier naturel non nul.*

Fonction f	*Fonction dérivée f'*	*Ensemble de dérivabilité*
a	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Exercice 5 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2$ au pointd'abscisse -1.